

UOT 517.97**POTENSİALA NƏZƏRƏN BİR TƏRS MƏSƏLƏ
VƏ ONUN ANALİTİK HƏLLİ****A.A.NİFTİYEV, N.Ş HÜSEYNOVA*****Bakı Dövlət Universiteti, Tətbiqi Riyaziyyat ETİ
aniftiyev@yahoo.com, nargiz_huseynova@yahoo.com***

İşdə dalğa tənliyi variasiya formasına gətirilərək analitik həll olunmuş və funksionalın qradienti üçün analitik ifadə alınmışdır. Həmçinin potensiala nəzərən tərs məsələ həll edilərək optimal potensial üçün analitik ifadə tapılmışdır.

Açar sözlər: tərs məsələ, variasiya metodu, optimal potensial.

Məlumdur ki, nəzəri fizikanın və eləcə də kvant mexanikasının əsas məsələlərindən biri də, bəzi fiziki maraq kəsb edən xüsusi potensiallar üçün dalğa tənliklərinin analitik həll edilməsidir. Çünki, dalğa tənlikləri həll edilərək əldə olunan dalğa funksiyalarından kvant obyektləri haqqında mühüm məlumatları almaq mümkündür. Ona görə də Şredinger və Klein-Fok-Qordon tənliklərinin analitik və rəqəmsal həlli ciddi əhəmiyyət kəsb edir [1,2].

Bu nöqtəyi-nəzərdən sabit xarici maqnit sahəsində hərəkət edən ikiölçülü pion atomunun nəzəri və təcrübi tədqiqi, enerji spektrlərinin analitik və rəqəmsal hesablanması və onların kvant ədədlərindən asılı olaraq optimal idarə olunması tətbiqi fizika və tətbiqi riyaziyyatın ciddi məsələlərindən biridir.

Xarici sahələrdə, xüsusilə xarici maqnit sahəsində dalğa tənliklərinin analitik və rəqəmsal həllərinin tapılması və onların üzərində kvant ədədlərindən asılılığını müəyyənləşdirən optimal həllərin qurulması olduqca vacib və maraqlıdır [3-5].

Tədqiq olunan praktiki məsələdə problemin həlli baxdığımız oblastın müxtəlif aralıq nöqtələrində mövcud olur. İşdə əsas məqsəd elə potensial tapmaq tələb olunur ki, baxılan məsələnin bu potensiala uyğun həlli verilən şərtləri ödəmiş olsun. Bu məsələ potensiala görə tərs məsələdir. Burada problemi həll etmək üçün qoyulan məsələ variasional qoyuluşa gətirilərək həll

olunur. Tapılan həldən optimallıq şərti alınır və funksionalın qradienti üçün düstur tapılır.

Məsələnin qoyuluşu: Məlumdur ki, zərrəciyin mərkəzi sahədə hərəkəti aşağıdakı tənliklə təsvir olunur:

$$-\frac{a}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{bR}{r^2} + q(r)R = ER . \quad (1)$$

Burada $a > 0$ və b -verilmiş ədədlərdir, $q(r)$ isə qarşılıqlı təsir enerjisidir. (1) tənliyini r^2 -ə vurub

$$Q(r) = b + q(r)r^2$$

əvəzləməsini qəbul etsək, onda aşağıdakı tənliyi alırıq:

$$-a \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + Q(r)R = Er^2 R . \quad (2)$$

(2) tənliyinin müxtəlif potensiallar üçün analitik həllərinin tapılması olduqca maraqlıdır. Amma analitik həllərin tapılması həmişə mümkün olmur. Həmçinin (2) tənliyini həll edərək enerjinin məxsusi qiymətinə görə $Q(r)$ potensialının, yəni tərs məsələnin həlli də olduqca maraqlıdır.

$$R(r_0) = z_0, R(r_1) = z_1, R(r_2) = z_2, \dots, R(r_n) = z_n, \quad (3)$$

burada

$$0 < r_0 < r_1 < \dots < r_n; \quad n \geq 2.$$

(2) tənliyinə $[r_1, r_n]$ intervalında baxaq. Bu işdə əsas məqsəd $[r_1, r_n]$ intervalında $Q(r)$ potensialını tapmaqdır. Həmçinin göstərməliyik ki, (2) tənliyinin həlli $R(r)$ funksiyası (3) şərtini ödəyir.

Fərz edək ki, (2) tənliyinin həlli $R(r)$ və (3) şərti mövcuddur. (2) tənliyini həll etmək üçün onu variasiya formasında yazaq. Funksionalın minimumunu tapaq:

$$J(Q) = \sum_{i=1}^{n-1} [R(r_i) - z_i]^2 \rightarrow \min, \quad (4)$$

(2) tənliyindən aşağıdakı şərti almış oluruq

$$R(r_0) = z_0, \quad R(r_n) = z_n. \quad (5)$$

Aydındır ki, əgər $Q^* = Q^*(r)$, (2) və (3) məsələlərinin həllidirsə, onda o (2), (4) və (5) variasiya məsələlərinin həllidir, həmçinin bunun əksi də doğrudur. Həqiqətən də, fərz edək ki, $Q^* = Q^*(r)$ (2), (4) və (5) məsələlərinin həllidir. Onda $J(Q^*) = 0$. Bu onu göstərir ki, (3) şərti ödənilir. Amma $J(Q^*) > 0$ halı isə (2) və (3) məsələlərinin həllərinin olmadığını göstərir. (2), (3) və (2), (4), (5) məsələlərinin ekvivalentliyini nəzərə alaraq (2), (4), (5) məsələlərinin optimal idarə olunmasını tədqiq edək. Qeyd edək ki, idarə olunma funksiyasını

$Q = Q(r)$, $r \in [r_0, r_n]$ potensialı yerinə yetirir və onun üzərinə əlavə şərt qoyurlar.

Fərz edək ki, $Q(r)$ sinfinin idarə olunması bu şəkildədir:

$$U = \{Q = Q(r) \in L_2(r_0, r_n) : Q_0 \leq Q(r) \leq Q_1, \forall r \in [r_0, r_n]\}. \quad (6)$$

Burada $0 \leq Q_0 < Q_1$ verilmiş ədədlərdir.

Fərz edək ki, $\psi = \psi(r)$ funksiyası aşağıdakı tənliyin həllidir

$$-a \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + Q(r)\psi - Er^2\psi = -2 \sum_{i=1}^{n-1} [R(r) - z_i] \delta(r - r_i), \quad (7)$$

$$\psi(r_0) = 0, \quad \psi(r_n) = 0. \quad (8)$$

Burada $\delta = \delta(t)$ Dirakın delta funksiyasıdır, z

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

Fərz edək ki, $Q = Q(r)$, $\bar{Q} = \bar{Q}(r)$ hər hansı U çoxluğundan olan iki potensialdır. (2) və (5) tənliklərinin bu potensiallara uyğun həllərini $R(r)$ və $\bar{R}(r)$ ilə işarə edək. Onda aydındır ki,

$$-a \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Delta R}{dr} \right) + Q(r)\Delta R - Er^2\Delta R + \Delta Q\bar{R} = 0, \quad (9)$$

$$\Delta R(r_0) = 0, \quad \Delta R(r_n) = 0, \quad (10)$$

burada

$$\Delta R = \bar{R}(r) - R(r), \quad \Delta Q = \bar{Q}(r) - Q(r).$$

(9) tənliyini $\psi = \psi(r)$ funksiyasına vurub və $[r_0, r_n]$ parçasında inteqrallayaq.

Onda alarıq:

$$\int_{r_0}^{r_n} \left[-a \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + Q(r)\psi - Er^2\psi \right] \Delta R dr + \int_{r_0}^{r_n} \Delta Q \bar{R} \psi dr - \left. -ar^2 \frac{d\Delta R}{dr} \psi \right|_{r_0}^{r_n} + \left. ar^2 \frac{d\psi}{dr} \Delta R \right|_{r_0}^{r_n} = 0. \quad (11)$$

İndi isə (4) funksionalının artımını hesablayaq

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(\bar{Q}) - J(Q) = \sum_{i=1}^{n-1} [\bar{R}(r_i) - z_i]^2 - \sum_{i=1}^{n-1} [R(r_i) - z_i]^2 = \\ &= 2 \sum_{i=1}^{n-1} [R(r_i) - z_i] \Delta R(r_i) + \sum_{i=1}^{n-1} [\bar{R}(r_i) - R(r_i)]^2. \end{aligned} \quad (12)$$

(12) ifadəsinə (11) ifadəsini əlavə etsək (nəzərə alsaq ki, sağ tərəfi sıfıra bərabərdir) və nəzərə alsaq ki, $\Delta R(r_0) = \Delta R(r_n) = 0$, onda alarıq:

$$\begin{aligned}
\Delta J &= 2 \sum_{i=1}^{n-1} [R(r_i) - z_i] \Delta R(r_i) + \int_{r_0}^{r_n} \Delta Q \bar{R} \psi dr + \\
&+ \int_{r_0}^{r_n} \left[-a \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + Q(r) \psi - Er^2 \psi \right] \Delta R dr - ar^2 \frac{d\Delta R}{dr} \psi \Big|_{r_0}^{r_n} + \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} [\bar{R}(r_i) - R(r_i)]^2 = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Dirakın $\delta(t)$ funksiyasının aşağıdakı xassələrindən istifadə etsək

$$\int_{r_0}^{r_n} f(r) \delta(r - r_i) dr = f(r_i), \quad i = \overline{1, n-1},$$

alırıq

$$\sum_{i=1}^{n-1} [R(r_i) - z_i] \Delta R(r_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^T [R(t - z_i) \Delta R(t) \delta(t - r_i)] dt, \tag{14}$$

(14) ifadəsini (13)-də nəzərə alsaq və $\psi = \psi(r)$ funksiyasının (7), (8) və (13) tənliklərinin həlli olduğunu qəbul etsək alırıq:

$$\Delta J = \int_{r_0}^{r_n} Q(r) \psi \Delta R dr + \sum_{i=1}^{n-1} [\bar{R}(r_i) - R(r_i)]^2. \tag{15}$$

İndi isə göstərək ki,

$$|\Delta R(r)| \leq c \|\Delta Q\|_{L_2(r_0, r_n)}, \tag{16}$$

burada $c > 0$ -sabitdir.

Ondan ötrü (9) tənliyini ΔR -ə vurub $[r_0, s]$, $r_0 < s \leq r_n$ parçasında inteqrallayaq. Onda alırıq

$$a \int_{r_0}^s r^2 \left(\frac{d\Delta R}{dr} \right)^2 dr + \int_{r_0}^s [Q(r) - Er^2] \Delta R^2 dr + \int_{r_0}^s \Delta Q \bar{R} \Delta R dr = 0.$$

Buradan aydındır ki,

$$ar_0^2 \int_{r_0}^s \left(\frac{d\Delta R}{dr} \right)^2 dr \leq C_1 \|\Delta Q\|^2 + C_2 \int_{r_0}^s |\Delta R|^2 dr.$$

Burada C_1, C_2 -müsbət ədədlərdir. Onda

$$\int_{r_0}^s \left(\frac{d\Delta R}{dr} \right)^2 \leq C_3 \|\Delta Q\|^2 + C_4 \int_{r_0}^s |\Delta R|^2 dr. \tag{17}$$

$\Delta R(r_0) = 0$ olduğunu nəzərə alsaq, onda alırıq:

$$\begin{aligned}
(\Delta R(s))^2 &= \int_{r_0}^s \frac{d}{dr} (\Delta R)^2 dr = 2 \int_{r_0}^s \Delta R \frac{d\Delta R}{dr} dr \leq \\
&\leq \int_{r_0}^s (\Delta R)^2 dr + \int_{r_0}^s \left(\frac{d\Delta R}{dr} \right)^2 dr.
\end{aligned}$$

Burada (17) şərtini nəzərə alsaq, alarıq:

$$(\Delta R(s))^2 \leq C_6 \int_{r_0}^s (\Delta R)^2 dr + C_7 \|\Delta Q\|^2. \quad (18)$$

Qranulla [6] lemmasını nəzərə alsaq (18) bərabərsizliyindən alarıq

$$(R(s))^2 \leq C_8 \|\Delta Q\|^2, \quad s \in [r_0, r_n].$$

Beləliklə, (16) bərabərsizliyini isbat etmiş olduq. Sonuncu bərabərsizliyi (15) ifadəsində nəzərə alsaq, onda alarıq:

$$\Delta J = \int_{r_0}^{r_n} Q \psi \Delta R dr + o(\|\Delta Q\|). \quad (19)$$

Ənənəvi [6] texnikasını tətbiq etsək, (19) ifadəsindən aşağıdakı teoremi alarıq.

Teorem 1. Fərz edək ki, $Q^* = Q^*(r)$ (2), (4) və (5) məsələləri üçün optimal potensialdır. Onda ixtiyari $Q = Q(r) \in U$ üçün aşağıdakı münasibət ödənilir

$$Q^*(r) \psi^*(r) R^*(r) = \min Q(r) \psi^*(r) R^*(r), \quad \forall r \in [r_0, r_n], \quad Q_0 \leq Q(r) \leq Q_1, \quad (20)$$

burada $R^* = R^*(r)$, $\psi^* = \psi^*(r)$, $Q = Q(r)$ olduqda (2), (5) və (7), (8) məsələlərinin həllidir.

Teorem 2. (4) funksionalı diferensiallandıran və onun qradienti üçün aşağıdakı formul doğrudur

$$J'(Q) = \psi R. \quad (21)$$

Teorem 1 imkan verir ki, optimal potensialı analitik təyin edək.

Nəticə. Fərz edək ki, $Q^* = Q^*(r)$ (2), (4), (5) məsələləri üçün optimal potensialdır. Onda

$$Q^*(r) = \begin{cases} Q_0, & \psi^*(r) > 0, \\ Q_1, & \psi^*(r) < 0. \end{cases} \quad (22)$$

Qeyd edək ki, $\psi^*(r) = 0$ halında isə potensial ixtiyari seçilə bilər.

ƏDƏBİYYAT

1. Greiner W. Quantum Mechanics, 4th. Edition Berlin, Springer, 2001, 512 p.
2. Bagrov V.G., Gitman D.M. Exact Solutions of Relativistic Wave Equations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990, 323 p.
3. Ахмедов Х.И., Гусейнова Н.Ш. Аналитическое решение уравнения Клейна-Фока-Гордона для двумерного пионного атома, движущегося в постоянном однородном магнитном поле. Известия ВУЗ Россия, v.52, No.3, 2009, с.321-327.
4. Huseynova N.Sh., Niftiyev A.A. On Dependence of Energy Eigen-Value on the Ends of the Interval, Transactions, Issue Mathematics and Mechanics Series of Physical-Technical and Mathematical Science, v.31, No.4, 2001, pp.159-166.

5. Ahmadov H.I., Aydin C., Huseynova N.Sh., Uzun O. Analytical Solutions of the Schrodinger equation with the Manning-Rosen Potential Plus a Ring-Shaped Potential, International Journal of Modern Physics E, Vol.22, N.10, 2013, pp. 1350072-1-1350072-16.
6. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОТНОСИТЕЛЬНО ПОТЕНЦИАЛА И ЕЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

А.А.НИФТИЕВ, Н.Ш.ГУСЕЙНОВА

РЕЗЮМЕ

В данной работе было найдено аналитическое решение волнового уравнения приведенным его к вариационной форме и было получено аналитическое выражение для градиента функционала. А также решением обратной задачи, относительно потенциала, было получено аналитическое выражение для оптимального потенциала.

Ключевые слова: обратная задача, вариационный метод, оптимальный потенциал

AN INVERSE PROBLEM WITH RESPECT TO THE POTENTIAL AND ITS SOLUTION

A.A.NIFTIYEV, N.Sh.HUSEYNOVA

SUMMARY

In this work the wave equation is analytically solved in the variational form and for the gradient of the functional expression is found. Further, analytical expression for the optimal potential in the inverse potential is obtained.

Key words: inverse problem, variational method, optimal potential

Redaksiyaya daxil oldu: 27.02.2014-cü il
Çapa imzalandı: 04.04.2014-cü il